TENTAMEN CALCULUS 1
MAANDAG 30 OKTOBER 2006, 8:30–11:30

Schrijf op elk in te leveren blad je naam, en op het eerste blad het aantal ingeleverde bladen. Alle (negen) opgaven tellen even zwaar. Het gebruik van boek(en) of een grafische rekenmachine is bij dit tentamen niet toegestaan.

(1) Gegeven is de functie $f(x) = xe^{-x}$. Laat zien, dat voor elk geheel getal $n \geq 1$ de n-de afgeleide $f^{(n)}$ van f gegeven wordt door $f^{(n)}(x) = (-1)^n(x-n)e^{-x}$.

(2) Gegeven een functie f met de eigenschap dat $|f(x)| \leq 100$ voor elke x. Toon aan dat de functie $g(x)$ gegeven door $g(x) = xf(x)$, continu is in $x = 0$.

(3) Gegeven $f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos(\frac{1}{x}) & \text{als} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{als} \quad x = 0. \end{cases}$
Gebruik de definities van 'differentieerbaar' en van 'limiet' om te laten zien, dat f niet differentieerbaar is in $x = 0$.

(4) Bereken $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sinh(x)}{\sin(x)}$.

(5) Bepaal de afgeleide van $f(x) = (x^2+1)^x$.

(6) Bepaal een primitieve van $\cos^2(x)e^x$.

(7) Een staaf van 5 meter lang is met één uiteinde vastgemaakt aan het punt $(0,0)$, en draait om dit punt met een constante hoeksnelheid van 100π radialen (dus 50 omwentelingen) per seconde, tegen de wijzers van de klok in. Aan het andere uiteinde van de staaf scharniert een tweede staaf, die 15 meter lang is. Het vrije uiteinde van de tweede staaf schuift op en neer langs de y-as. Op tijdstip $t = 0$ staat alles verticaal, zodat het uiteinde van de langste staaf 20 meter boven de x-as zit.

Teken hiervan een plaatje, en leg uit, dat op tijdstip t (seconden) het hoogste punt van de langste staaf hoogte

$$5\cos(100\pi t) + \sqrt{225 - 25\sin^2(100\pi t)}$$

heeft.

Wat is de snelheid van het hoogste punt van de lange staaf, op het moment dat de kortere staaf de x-as passeert?

(8) Vind een niet-constante functie $y(x)$ die voldoet aan

$$(x^2-1)y' = y^2 + y.$$

(9) Wat is de lengte van de kromme gegeven door de parametrisering $(x(t), y(t))$, met $x(t) = t^3$ en $y(t) = 3t^2$, voor $-1 \leq t \leq 1$?